

Dạng 3: Max – min của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta thường sử dụng ba cách làm sau đây

- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:
 $\square -1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\square 0 \leq \sin^2 x \cdot \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\square -1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\square 0 \leq |\sin x| \cdot |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Sử dụng điều kiện có nghiệm
 $\square \sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 $\square \cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 $\square a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
- Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó đưa ra kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây:

a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$

c) $y = \sin x + \cos x$

d) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$

e) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

f) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$

Hay $-1 \leq y \leq 3$.

$\square \max y = 3$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\square \min y = -1$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3$ hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$

$\square \max y = 2\sqrt{2} - 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\square \min y = -3$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$.

$\square \max y = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\square \min y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d) Ta có: $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -2 \leq y \leq 2.$

$$\square \max y = 2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \min y = -2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

e) Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x)^2 + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \text{ hay } 0 \leq y \leq 4$$

$$\square \max y = 4 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \min y = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

f) Ta có

$$y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$$

$$\square \max y = 2 \text{ khi } \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \min y = -1 \text{ khi } \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

a) $y = \frac{2 \sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

b) $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

Lời giải

a) Ta có: $\sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$. Vì $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2} \Leftrightarrow y \sin x + y \cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$

$$\Leftrightarrow (y-2)\sin x + (y+1)\cos x = 2y+1 \quad (*)$$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \geq (2y+1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \leq y \leq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

b) Ta có $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Vậy $m = -2; M = 1$.

Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

Lời giải

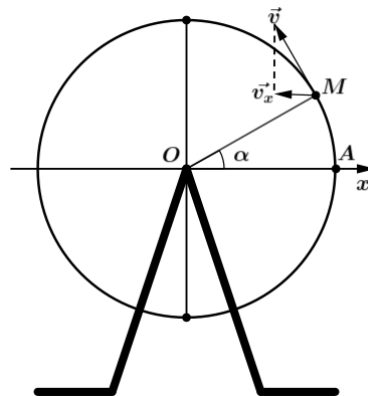
Ta có: $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + 2y = m\sin x + 1 \Leftrightarrow m\sin x - y \cos x = 2y - 1 \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm khi $m^2 + y^2 \geq (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3} \Rightarrow y_{\max} = \frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} < 4 \Leftrightarrow m^2 < 5$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 2; 1\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 4: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha$ (m/s).



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .

b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

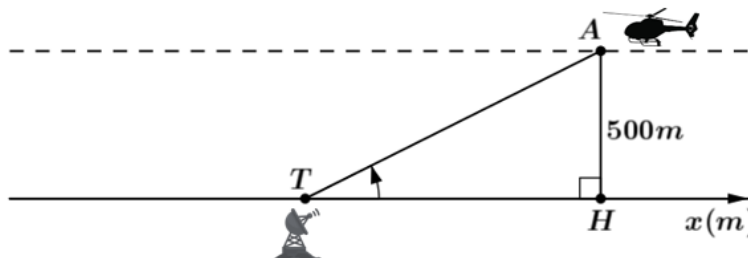
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3$ (m) và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3$ (m).

b) Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$); v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Bài tập 5: Trong hình dưới đây, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H và α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$. Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 3x - 4$ lần lượt là

- A. 7;1. B. 1;-4. C. 3;-4. D. -1;-7.

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 3x \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq 3\sin 3x - 4 \leq -1$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là -1 khi $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -7 khi $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là:

- A. -8 và -2 B. 2 và 8. C. -5 và 2. D. -5 và 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\sin 2x \leq 3 \Rightarrow -8 \leq 3\sin 2x - 5 \leq -2$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x - 3$ là

- A. -7. B. -3. C. 1. D. 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq 4\sin x - 3 \leq 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng 1, dấu "=" xảy ra khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là

- A. 5. B. 2. C. 1. D. -1.

Lời giải

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \\ \Leftrightarrow -1 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \leq 5.$$

Vậy giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là -1.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tính

$$P = M - m.$$

- A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = 4$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \text{ nên } -2 \leq y \leq 2.$$

$$\text{Vậy } P = M - m = 2 - (-2) = 4.$$

Câu 6: Biết hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ đạt giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Tổng $M + m$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Để tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số thì phải tồn tại giá trị của x sao cho $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ hay phương trình $4\sin x - 3\cos x = y - 2$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 \geq (y - 2)^2 \Leftrightarrow 25 \geq (y - 2)^2 \Leftrightarrow -5 \leq y - 2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Vậy } M = y_{\max} = 7, m = y_{\min} = -3 \Rightarrow M + m = 4.$$

Câu 7: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3$ là

- A. $M = 1$ và $m = -5$. B. $M = 1$ và $m = -7$.
C. $M = -1$ và $m = -6$. D. $M = -1$ và $m = -5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = y + 3$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \geq (y + 3)^2 \Leftrightarrow (y + 3)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq y + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq -1. \text{ Vậy } M = -1, m = -5.$$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2020$ là:

A. 2024.

B. 2018.

C. 2022.

D. 2016.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2020 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) + 2020 = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2020.$$

$$\text{Ta có: } -1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 2.$$

$$\text{Suy ra } 2018 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2020 \leq 2022 \Leftrightarrow 2018 \leq y \leq 2022.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 2018 khi } \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 9: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ trên $\left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$ là

A. 1 và -1.

B. 1 và $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$ và 1.

D. $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\forall x \in \left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \in [-\pi; \pi] \Rightarrow -1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Với } x = \frac{-2\pi}{3} \Rightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Rightarrow y = 1 \text{ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 1.}$$

$$\text{Với } x = \frac{-\pi}{6} \Rightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Rightarrow y = -1 \text{ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.}$$

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ lần lượt là

A. -2 và 2.

B. 5 và 9.

C. -2 và 7.

D. 4 và 7.

Lời giải

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq 7 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 9$$

$$\text{Nên } \min y = 5 \text{ và } \max y = 9.$$

Câu 11: Hàm số $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 5$ đạt giá trị lớn nhất tại

A. $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 5 \leq -3, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó $\max y = -3$ khi $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 12: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos x + 1$ là

A. 3.

B. 4.

C. -1.

D. -2.

Lời giải

Ta có $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos x + 1 = \sin x - \sqrt{3}\cos x + 1 = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 3.$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 3.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos x + 4.$

A. 5.

B. 6.

C. $\frac{\pi}{8}.$

D. $-\frac{\pi}{4}.$

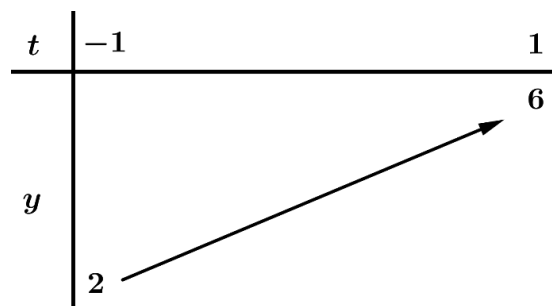
Lời giải

Ta có: $y = \sin^2 x + 2\cos x + 4 = -\cos^2 x + 2\cos x + 5.$

Đặt $t = \cos x$; vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $t \in [-1; 1].$

Khi đó: $y = -t^2 + 2t + 5$ là hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ và tọa độ đỉnh parabol là $I(1; 6).$

Bảng biến thiên:



Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 6.

Câu 14: Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ khi x bằng:

A. $\frac{\pi}{4}.$

B. 0.

C. $\frac{\pi}{8}.$

D. $-\frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Ta có: $0 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ suy ra: $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}.$

Vậy hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ bằng $\frac{3}{2}$ khi

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$

A. -20.

B. 0.

C. 9.

D. -1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sin^2 x - 4\sin x + 2 = \sin^2 x - 4\sin x + 4 - 4 + 2 = (\sin x - 2)^2 - 2$$

$$\text{Do } \sin x \leq 1 \Rightarrow (\sin x - 2)^2 \leq (-1)^2 \Rightarrow (\sin x - 2)^2 - 2 \leq -1.$$

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là

A. -2 và 7.

B. 5 và 9.

C. 4 và 7.

D. -2 và 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 9.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số là 5 và 9.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + 2\cos x - 3$ là:

A. $\sqrt{5} + 3$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 0

D. $\sqrt{5} - 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right) - 3 = \sqrt{5}\sin(x + \alpha) - 3, \text{ với } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\max_{\square} y = \sqrt{5} - 3 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \square \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$$

Câu 18: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3}$ bằng

A. -6.

B. -1.

C. -3.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3} \Leftrightarrow (y - 2)\cos x = 3y(*).$$

Trường hợp 1: $y = 2$. Khi đó: (*) trở thành: $0 = 6$ (vô lý).

$$\text{Trường hợp 2: } y \neq 2. \text{ Khi đó: } (*) \text{ trở thành: } \cos x = \frac{3y}{2 - y}.$$

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì: } \begin{cases} -1 \leq \frac{3y}{2 - y} \leq 1 \\ 2 - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$ khi $x = k2\pi$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 khi $x = \pi + k2\pi$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ bằng

- A. -6 . B. -1 . C. -3 . D. -2 .

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \leq 2\sin 3x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ là -2 , xảy ra khi $\sin 3x = -1$

$$\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 20: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

- A. -5 . B. 1 . C. 5 . D. -1 .

Lời giải

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -3 \Leftrightarrow 5 \geq 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ bằng 5 .

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ là

- A. $\sqrt{2}$. B. 2 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 2x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2}.$$

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018$ bằng

- A. 2019. B. 2021. C. 2020. D. 2022.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018 \Leftrightarrow y = 1 + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2018$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + 2019 \Leftrightarrow y = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2019 \leq 2 \cdot 1 + 2019 = 2021.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}). \text{ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng } 2021 \text{ khi } x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 23: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$.

- A. -2 . B. 2 . C. 3 D. -4 .

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 5\sin(x + \alpha) - 2$, trong đó: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

$\forall x \in D$ ta có: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq 5\sin(x + \alpha) - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq y \leq 3$

$y = -7 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$y = 3 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$ trên $D = \mathbb{R}$ lần lượt là -7 và 3

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4 .

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x$ là

A. 0,2.

B. 0,25.

C. 0,16.

D. 0,125.

Lời giải

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Lại có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\frac{1}{4} = 0,25$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$

A. $M = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{2}$.

B. $M = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

C. $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $M = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \cos 2x} + \frac{1}{2}\sqrt{6 - \cos 2x} = \frac{1}{2}(1 \cdot \sqrt{5 + \cos 2x} + 1 \cdot \sqrt{6 - \cos 2x}).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$y = \frac{1}{2}(1 \cdot \sqrt{5 + \cos 2x} + 1 \cdot \sqrt{6 - \cos 2x}) \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2) \cdot (5 + \cos 2x + 6 - \cos 2x)} \leq \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{1}{\sqrt{5 + \cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{6 - \cos 2x}} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5
- b) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$
- d) Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, khi đó $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1, khi đó $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$ và $g(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{3}$
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 4
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng 0

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Rightarrow 3 \geq 2 - \sin x \geq 1$
 $\Rightarrow \sqrt{3} \geq \sqrt{2 - \sin x} \geq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{3}$, khi đó $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1, khi đó $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + 2 = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \leq 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, khi đó $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi đó $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3: Cho hàm số $y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng:

$$-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Đúng: Vậy giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số trên là hàm số chẵn. Vì $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = f(x) \end{cases}$.

c) Đúng: Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.

Ta có $y = \cos 2x + \cos x$; $y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

Đặt: $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$ khi đó $f(t) = 2t^2 + t - 1$.

d) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0. Với hàm số $f(t) = 2t^2 + t - 1$ ở câu c:

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$f(t)$	0	$-\frac{9}{8}$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m = \min_{[-1;1]} f(t) = -\frac{9}{8}$.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$ là $\sqrt{5}$.

d) Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Hơn nữa $y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x)$ suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Đúng: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Điều kiện xác định $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$ là $\sqrt{5}$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2\sin x + 3} \leq \sqrt{5}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\sqrt{5}$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Đúng: Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

Xét hàm số: $g(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m\sin 2x$.

Đặt $t = \sin 2x, t \in [-1; 1]$.

Hàm số đã cho xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 - mt + 1 \geq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1].$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2mt - 2, \forall t \in [-1; 1]$.

Ta có $\max_{[-1; 1]} f(t) = f(-1)$ hoặc $\max_{[-1; 1]} f(t) = f(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(t) = t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1] &\Leftrightarrow \max_{[-1; 1]} f(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2m \leq 0 \\ -1 - 2m \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos x - \sin x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\min y = -2$.

d) Phương trình $y + 1 = 0$ có tất cả 4 nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ đều là $D = \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số $y = \cos x - \sin x$ là $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $y = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

c) Sai: Vì tập giá trị của hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là đoạn $[-1; 1]$, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là $\min y = -\sqrt{2}$.

d) Đúng: $y + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}$

Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ ta tìm được 4 nghiệm là $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\pi; \pi\right\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 12\pi$.
- c) Hàm số là hàm số lẻ.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Nên mệnh đề b sai.

c) Sai: Ta có $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $y(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$ và $y(-x) = 2\cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$.

Vậy $y(x) = y(-x)$ nên hàm số $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ là hàm số chẵn.

d) Đúng: Ta có $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Nên $-2 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 9 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11 \leq 13 \Leftrightarrow 9 \leq y \leq 13$.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \sin 3x - \cos 3x + m$ có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = \sin 3x - \cos 3x + m = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) + m = \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + m \leq \sqrt{2} + m$

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng $\sqrt{2}$ khi $\sqrt{2} + m = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 2: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x + m$ bằng 10

Lời giải

Gọi y_0 thuộc tập giá trị Y của hàm số.

Khi đó, phương trình $3\sin x + 4\cos x + m = y_0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } 3\sin x + 4\cos x = y_0 - m \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \geq (y_0 - m)^2$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq y_0 - m \leq 5 \Leftrightarrow -5 + m \leq y_0 \leq 5 + m$$

Ta có, tập giá trị của hàm số: $Y = [-5 + m; 5 + m]$ nên $\max y = 5 + m \Leftrightarrow 10 = 5 + m \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 3: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x$ đạt được bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{N}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 + \sin x \cos x \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \text{ suy ra } y = -\frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1 = -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t + 1, t \in [-1; 1] \end{aligned}$$

Ta có hoành độ đỉnh $t_0 = \frac{1}{2}$ mà $y(-1) = 0; y(1) = 1; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$.

Giá trị lớn nhất của $y = \frac{9}{8}$ đạt được khi $\sin 2x = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{9}{8} \Rightarrow a + b = 17$.

Câu 4: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $\forall \alpha$ nên ta có: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \leq 3 \cdot 1 + 12 = 15$.

Suy ra $d(t)_{\max} = 15$ đạt được khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow t = 171 + 364k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên ta có: $0 < 171 + 364k \leq 365 \Rightarrow \frac{-171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$ do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Ta có: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \quad \forall t \Rightarrow d(t) \geq 3 \cdot (-1) + 12 = 9$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k \Leftrightarrow t = -11 + 364k$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Rightarrow 0 < -11 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 353.$$

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày 353 trong năm.

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\max h = 15 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 16k.$$

$$\text{Trong 1 ngày có 24 giờ nên } 0 \leq -2 + 16k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{26}{16}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1 \Rightarrow t = 14$ giờ.

-----HẾT-----